T2 B **15 mai 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) On considère l'ellipsoïde de révolution E d'équation : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.
a) Ecrire l'équation du plan P tangent à E au point $M(a, b, c)$.
b) Montrer que P est orthogonal à la droite D d'équations $x = y/3 = -z/2$ si et seulement si $b = 3a$ et $c = -a$.
c) En quels points de E le plan tangent P est-il orthogonal à D ?

(**2**) On considère la surface S d'équation : $z^3 = xy$.
a) Trouver un paramétrage de la surface S $(x(u, v) = \ldots,\ y(u, v) = \ldots,\ z(u, v) = \ldots)$.
Quels sont les points réguliers de S ?
b) Ecrire l'équation du plan P tangent à S au point régulier $M(a, b, c)$.
c) En quels points de S le plan P contient-il la droite D d'équations : $x = 2,\ y = 3z + 3$?
(Paramétrer d'abord D : $x(t) = \ldots,\ y(t) = \ldots,\ z(t) = \ldots$)

(**3**) Montrer que la courbe Γ, intersection des deux surfaces d'équations
$z^2 - xy - 1 = 0$ et $x + y - z = 0$ est un cercle.

(**4**) Déterminer les équations de la droite D tangente en $A(-2, -1, 3)$ à l'intersection des deux surfaces d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = 18$ et $xy + yz + zx = -7$.

(**5**) On considère le paraboloïde hyperbolique P d'équation : $z = xy$.
a) Quelles sont les droites D contenues dans P ?
(On pourra distinguer les cas : D « horizontale » et D « non horizontale » ; dans le second cas, on paramètrera D par : $x(t) = at + b,\ y(t) = ct + d,\ z(t) = t$.)
b) Réciproquement, étant donné un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de P, déterminer les droites incluses dans P et passant par M_0.