T2 B 12 mai 2009

MATHÉMATIQUES

Développer en série de Fourier les fonctions 2π-périodiques f définies par :

(1) f est impaire et $f(x) = \pi x - x^2$ si $x \in [0, \pi]$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Écrire la relation de Parseval et obtenir la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

(2) $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x \in]-\pi, \pi]$

(On calculera $a_n + \mathrm{i}\, b_n$ pour $n \geq 1$.)

Préciser la somme de la série de Fourier de f.

En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

(3) $f(x) = \cos \alpha x$ si $x \in [-\pi, \pi]$ $(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$

(Représenter graphiquement f dans le cas $\alpha = 1/3$.)

En déduire que :

$$\pi \text{ cotan } \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + n} \quad \text{et}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + n}.$$