T2 B **17 avril 2009**

MATHÉMATIQUES

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif.

(**1**) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
On note $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et on rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

On pose, pour $x \in \mathbf{R}_+$:

$$F_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(**2**) Démontrer que F_α et G_α sont définies et de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer F_α' et G_α'.

On pose, pour $x \in \mathbf{R}_+$:

$$H_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}\,\mathrm{d}t.$$

(**3**) Vérifier que H_α est définie et de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, déterminer H_α',
et montrer que H_α est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle (E) :
$(x+\mathrm{i})\,y' = -\alpha y$.

(**4**) a) Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}$.
b) Résoudre l'équation (E).
c) En déduire que : $H_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)(x^2+1)^{-\alpha/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha \arctan x}$.

(**5**) a) Soit $u \in \mathbb{R}$. Simplifier $\cos(\arctan u)$.
(On pourra utiliser une relation entre $\cos^2$ et $\tan^2$).
b) En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\cos(\frac{1}{2}\arctan x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}}$.
Calculer aussi $\sin(\frac{1}{2}\arctan x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(**6**) À l'aide des questions précédentes, calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+$, les intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$