

MATHÉMATIQUES.

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, et on note $(x | y)$ le produit scalaire des vecteurs x et y .

On dit qu'un endomorphisme u de E est **antisymétrique** si et seulement si on a :

$$\forall x \in E \quad (u(x) | x) = 0$$

(autrement dit si et seulement si tout vecteur est orthogonal à son image).

(1) Donner un exemple d'endomorphisme antisymétrique non nul de \mathbb{R}^2 .

(2) Montrer qu'un endomorphisme u est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (u(x) | y) = -(x | u(y)).$$

(3) Soit u un endomorphisme de E , \mathcal{B} une base orthonormée de E , et A la matrice de u dans \mathcal{B} . Montrer que u est antisymétrique si et seulement si : ${}^t A = -A$.

Dans les questions (4), (5), (6) et (7), u désigne un endomorphisme antisymétrique non nul de E .

(4) Soit λ un nombre réel ; montrer que si λ est valeur propre de u , alors $\lambda = 0$.

(5) Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont orthogonaux et supplémentaires.

(6) a) Vérifier que u^2 est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de u^2 , alors $\mu \leq 0$.

c) Montrer que u^2 admet une valeur propre non nulle.

(7) Soit c un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(c, u(c))$.

Montrer que : a) $\dim F = 2$.

b) F est stable par u .

c) F^\perp est stable par u .

(8) Dans cette question, E est l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E , et u l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que u est un endomorphisme antisymétrique de E , et que le vecteur $c = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2 .

b) Soit F le sous-espace de E engendré par la famille $(c, u(c))$.

Déterminer une base orthonormée de F et une base orthonormée de F^\perp .

c) En déduire une base orthonormée \mathcal{B}' de E et deux nombres réels a et b

tels que la matrice de u dans \mathcal{B}' soit $A' = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}.$