T2 B **10 avril 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^{\pi} \sin(t^2 x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(**2**) a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de $F'(x)$ sous forme d'intégrale.

b) Au moyen d'une décomposition en éléments simples, montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on a : $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Déterminer $F'(1)$.

c) En déduire $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

(**3**) **Calcul de** $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $G(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t \sin xt}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $H(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F, G et H sont définies sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que G et H sont de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer G' et H' à l'aide F, G et H.
d) Trouver une relation simple entre $xF(x)$ et $G(x)$.
e) A l'aide des relations obtenues dans les questions précédentes,
montrer que F est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que : $\forall x > 0 \ xF'(x) = F(x) - 2H(x)$,
puis que F est de classe $\mathbf{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x > 0 \ F''(x) = F(x)$.
f) Rappeler la solution générale de l'équation différentielle : $y'' = y$;
en vérifiant que F est bornée, et en étudiant $\lim_{x\to 0} F(x)$, déterminer $F(x)$ pour $x > 0$.
g) Représentation graphique de F sur $\mathbb{R}$.