

MATHÉMATIQUES

(1) Soit u un automorphisme orthogonal de l'espace vectoriel euclidien E , et F un sous-espace de E stable par u .

- a) Vérifier que $u(F) = F$.
- b) Montrer que F^\perp est stable par u .

(2) Soit $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; montrer que A est la matrice d'une rotation de \mathbb{R}^3 , dont on précisera l'axe et l'angle.

(3) Soit $B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; montrer que B est diagonalisable, et la diagonaliser avec une matrice de passage orthogonale.

(4) Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

- a) Montrer que pour tous polynômes P et Q , l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t}P(t)Q(t)dt$ est convergente.
- b) Vérifier $(P | Q) = \int_0^\infty e^{-t}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- c) On pose $P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que P_n est un polynôme de degré n et que $P_n(0) = n!$; préciser P_0, P_1, P_2 et P_3 .
- d) Montrer que pour tout polynôme Q de degré $< n$, on a : $(P_n | Q) = 0$ (intégrer par parties n fois).
- e) Montrer que : $(P_n | P_n) = (n!)^2$ (intégrer par parties).
- f) A l'aide des résultats précédents, trouver une base orthonormée de E .

(5) Décrire les quadriques d'équations :

- a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2z = 3$.
- b) $(x + y)(x - z) + \sqrt{3}(x - y - z) = 1$.

On donnera l'équation réduite et le nouveau repère, et on fera une figure.