

## MATHÉMATIQUES

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n \geq 2$  à coefficients **réels** et par  $F$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et une colonne à coefficients **complexes**. La transposée de  $A \in E$  est notée  ${}^tA$ , celle de  $X \in F$  est notée de même  ${}^tX$ . La conjuguée de  $X = [x_i]_{1 \leq i \leq n} \in F$  est la matrice  $\overline{X} = [\overline{x_i}]_{1 \leq i \leq n}$ .  $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  désigne la matrice diagonale d'ordre  $n$  dont la suite des coefficients diagonaux est  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $A$  un élément de  $E$  ; on pose :  $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ .

- (1) a) Montrer qu'il existe des réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  vérifiant  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et des éléments  $D$  et  $P$  de  $E$  tels que :  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $P$  est orthogonale et  $D = P^{-1}BP$ .  
 b) Soit  $X = [x_i]_{1 \leq i \leq n}$  un élément de  $F$  ; calculer  ${}^t\overline{X} D X$  en fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

On se propose de démontrer dans la question (2), que si  $\mu \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $A$ , la partie réelle de  $\mu$  est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur propre de  $B$ , autrement dit que  $\lambda_1 \leq \text{Re}(\mu) \leq \lambda_n$ . Ce résultat pourra être admis pour traiter les questions suivantes.

- (2) On pose :  $A' = P^{-1}AP$ .  
 a) Justifier que  $A$  et  $A'$  ont les mêmes valeurs propres et exprimer  $D$  à l'aide de  $A'$  et  ${}^tA'$ .  
 Soit  $X = [x_i]_{1 \leq i \leq n}$  un élément non nul de  $F$  tel que  $A'X = \mu X$  (où  $\mu \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $A$ ).  
 b) Vérifier que  ${}^t\overline{X} {}^tA' = \overline{\mu} {}^t\overline{X}$ , puis montrer que :  ${}^t\overline{X} D X = \text{Re}(\mu) {}^t\overline{X} X$ .  
 c) Conclure à l'aide de la question (1)b).

- (3) Vérifier le résultat de la question (2) pour la matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

On dit que la matrice  $A = [a_{i,j}] \in E$  est une **matrice de tournoi** si ses coefficients appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$  et si on a  $a_{i,i} = 0$  pour tout  $i$  et  $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$  pour  $i \neq j$ .

- (4) Donner la forme générale d'une matrice de tournoi d'ordre 2. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?  
 (5) Montrer que si  $\mu \in \mathbb{C}$  est une valeur propre d'une matrice de tournoi  $A$  d'ordre  $n$ , on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \text{Re}(\mu) \leq \frac{n-1}{2}.$$

- (6) Vérifier le résultat de la question (5) :

a) pour les matrices de tournoi d'ordre 2 ;

b) pour la matrice  $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .