T2 B **27 mars 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Déterminer les extremums globaux sur $K = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) .$$

(**2**) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz .$$

a) Rechercher les extremums locaux de f.
b) f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbf{R}^3$?

On rappelle (*inégalité arithmético-géométrique*) que si a, b et c sont des réels positifs, on a : $\sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$, et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $a = b = c$.

c) Soient x, y et z trois réels vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Trouver le maximum du produit $x^2y^2z^2$, puis le minimum et le maximum du produit xyz .
d) Déterminer alors les extremums globaux de f sur l'ensemble
$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(**3**) Soit E un espace préhilbertien, x et $y \in E$.
Calculer $\left\| \|y\|^2 x - (x \mid y)\, y \right\|^2$ et retrouver l'inégalité de Schwarz.

(**4**) Soit E un espace préhilbertien, et u une application de E dans E.
Montrer que si , pour tous x et y dans E, on a : $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$,
alors u est linéaire.
(Indication : calculer $(u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y) \mid u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y))$.)

(**5**) Soient f et g deux applications **continues** de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$.
On suppose que $fg \geq 1$.

a) Montrer que f et g sont de signe constant.
b) Montrer que $(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t)(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t) \geq (b - a)^2$.
(Appliquer l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire $(u \mid v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$
à des fonctions bien choisies.)
c) Trouver un exemple où l'inégalité du b) est en défaut quand f ou g n'est pas continue.

(**6**) Soit $F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5,\ x_1 + x_2 + x_3 = x_4 - x_5 = 0\}$,
et $a = (1, 2, 3, 4, 5)$; déterminer la projection orthogonale de a sur F, ainsi que la distance de a à F.