T2 B **20 mars 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Déterminer le rang, la signature, ainsi qu'une base orthogonale pour la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(**2**) Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

a) On pose, pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \quad : \quad u(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
Montrer qu'il existe une application linéaire v de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
$\forall x \in \mathbf{R}^4 \quad q(x) = u(x)v(x)$. En déduire le rang et la signature de q .

b) Déterminer le noyau N de la forme polaire f de q, ainsi que l'ensemble C des vecteurs isotropes pour f. Exprimer N et C à l'aide de Ker u et Ker v.

c) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
On pose, pour P et Q dans E : $\phi(P, Q) = (XPQ)'(1)$ (P' désignant le polynôme dérivé de P).
Vérifier que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E, écrire sa matrice M dans la base canonique de E, et déterminer sa signature.

(**3**) Rechercher les extremums locaux des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
c) $f(x, y, z, t) = x^4 - y^4 + z^4 - t^4 - x^2 + y^2 - z^2 + t^2$.

(**4**) Montrer que l'équation différentielle : $\quad 2xy'' + y' - y = 0 \quad$ admet une unique solution développable en série entière f vérifiant : $f(0) = 1$.
Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles (on distinguera $x \geq 0$ et $x \leq 0$), et la représenter graphiquement.