MATHÉMATIQUES

Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

(**1**) Vérifier que la série de terme général : $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $(n \geq 1)$ est convergente.

(**2**) Calculer le rayon de convergence R de la série entière $[a_n x^n]_{n\geq 1}$.

On pose: $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

(**3**) Vérifier que : $\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{\infty} (4(n+1)a_{n+1} - 2a_{n+1} - na_n - a_n)x^{n+1} = 0$.

En déduire que F est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(4x - x^2)y' - (x+2)y = x \ .$$

(**4**) Résoudre l'équation homogène (EH) associée à (E) sur l'intervalle $]0, R[$.
(On obtiendra : $y = K\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}$ où $K \in \mathbf{R}$.)

(**5**) Rechercher les solutions de (E) sur $]0, R[$ sous la forme :

$$y = K(x)\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}$$ (méthode de Lagrange ou de « variation de la constante »).

(Obtenir d'abord $K'(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, en déduire $K(x)$ en faisant un changement de variable puis une intégration par parties, et en déduire

$$y = K\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}} + \frac{x}{4-x} - 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\frac{\pi}{2} - \ \text{Arctan}\ \sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) .)$$

(**6**) Déterminer K pour que la solution précédente ait un prolongement **dérivable** en 0.
(Autrement dit, comment choisir K pour que y/x ait une limite finie en 0 ?)

(**7**) En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in]0, 4[$, puis que : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

(**8**) Majorer le reste d'ordre n de la série $[a_n]$ par une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de sa somme. Vérifier la cohérence du résultat obtenu avec celui de la question (**7**).