

## MATHÉMATIQUES.

(1) Soit  $f$  une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel  $E$  ; on dit que  $f$  est **antisymétrique** si et seulement si  $f(y, x) = -f(x, y)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

Montrer que  $f$  est antisymétrique si et seulement si  $f(x, x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $E$ .

(2) Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$  ; vérifier que, pour  $x, y$  et  $z$  dans  $E$ , on a :

$$q(x + y + z) = q(x + y) + q(y + z) + q(z + x) - q(x) - q(y) - q(z).$$

(3) Montrer que l'application  $q$  définie sur  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) par  $q(x) = \|x\|^2$  est une forme quadratique. Quelle est sa matrice dans la base canonique ?

(4) Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

On pose, pour  $A$  dans  $E$  :  $q(A) = \frac{1}{2}((\text{tr } A)^2 - \text{tr } (A^2))$  où  $\text{tr } A$  désigne la trace de  $A$ .

a) Vérifier que  $q$  est une forme quadratique sur  $E$  en précisant sa forme polaire  $f$ .

Dans toute la suite,  $n = 2$ .

b) Montrer que  $q(A) = \det A$  ; en déduire une autre expression de  $f$ .

c) Ecrire la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $E$  ; déterminer le rang de  $q$ .

d) Soit  $F = \{A \in E, \text{tr } A = 0\}$  ; donner la dimension de  $F$  (appliquer la formule du rang à l'application linéaire trace) et en déduire la dimension de  $F^\perp$  ; vérifier que  $I_2 \in F^\perp$ , et déterminer  $F^\perp$ .

(5) a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

b) On pose, pour  $|x| < 1$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$  et  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

Calculer  $f'(x)$  et  $g'(x)$ . En déduire  $f(x)$  et  $g(x)$ .

c) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X(X+1)(2X+1)}$ .

d) Calculer  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$  pour  $|x| < 1$ .

e) Montrer que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  pour  $n \geq 1$ .

f) Déduire des résultats précédents la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$ .