T2 B **20 février 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Rechercher les solutions **paires** et développables en série entière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' - 2y = 0\ .$$

Exprimer ensuite ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.
(On obtiendra : $y = K\ \mathrm{e}^{x^2}$ où $K \in \mathbf{R}$; préciser le rayon de convergence.)

(**2**) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \cos(t^2)\mathrm{d}t\ .$$

(Exprimer d'abord I comme somme d'une série alternée - on fera toutes les justifications nécessaires -, puis majorer le reste de rang n de cette série.)

(**3**) Calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{(2n)!}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$.

(**4**) Développer en série entière les fonctions suivantes :

$\dfrac{1}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$; $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ (faire un produit) ;

$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ (sans faire un produit !) ; $\operatorname{Arctan}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (commencer par dériver) ; $\sqrt{2+4x}$.

(**5**). On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2\ x^n$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Calculer $f(x)$.
c) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.