

MATHÉMATIQUES

On appelle **involution** de $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$, où $n \in \mathbf{N}^*$, une permutation de $[1, n]$ telle que : $\sigma = \sigma^{-1}$ (c'est-à-dire : $\sigma \circ \sigma = \text{id}$).

On note I_n le nombre d'involutions de $[1, n]$.

(1) Préciser I_1 , I_2 et I_3 .

(2) Montrer que : $\forall n \geq 2 \quad I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$ (déterminer pour cela le nombre d'involutions σ de $[1, n+1]$ vérifiant : $\sigma(n+1) = n+1$, puis, pour chaque entier k vérifiant $1 \leq k \leq n$, le nombre d'involutions σ de $[1, n+1]$ vérifiant : $\sigma(n+1) = k$). Calculer I_4 et I_5 .

(3) Déterminer I_0 pour que l'égalité de la question précédente soit encore vérifiée pour $n = 1$.

On considère la série entière $\left[\frac{I_n}{n!} x^n \right]_{n \geq 0}$, dont on note R le rayon de convergence, et S la somme : $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

(4) Étudier la convergence de la série $\left[\frac{I_n}{n!} x^n \right]_{n \geq 0}$ pour $|x| < 1$. En déduire que : $R \geq 1$.

(5) Montrer que S est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et résoudre cette équation.

(6) En déduire que, pour $x \in]-R, R[$, on a : $S(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$.

(7) En exprimant $\exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$ comme produit de deux séries entières, montrer que $R = +\infty$, et que :

$$I_n = n! \sum_{k=0}^{\mathbf{E}(n/2)} \frac{1}{2^k k! (n-2k)!}.$$

(**E** désigne la fonction partie entière.)

(8) Vérifier le résultat obtenu pour $n = 4$ et $n = 5$.