

MATHÉMATIQUES

(1) - On note Γ la courbe paramétrée d'équations :

$$x(t) = t \quad y(t) = \operatorname{sh} t \quad (t > 0).$$

- a) Déterminer au point $M(t)$ de Γ le repère de Frenet et le rayon de courbure $R(t)$.
- b) Rechercher en quel point I de Γ le rayon de courbure est minimal, et montrer que la valeur minimale du rayon de courbure est $3\sqrt{3}$.
- c) Déterminer les équations paramétriques de la développée Γ_1 de Γ .
Quelles sont les coordonnées du centre de courbure J en I ? Calculer la distance IJ .
- d) Retrouver les équations de Γ_1 à l'aide des droites normales à Γ .
- e) Représenter graphiquement Γ et Γ_1 . On étudiera précisément les branches infinies de Γ_1 , ainsi que la nature du point J .

(2) Soit Γ la parabole d'équation $y = x^2$.

- a) Déterminer l'équation du cercle de courbure C au point $M(t, t^2)$ de Γ .
- b) On suppose $t \neq 0$. Le cercle C recoupe la parabole en un point $M'(x, x^2)$.
Déterminer les coordonnées du point M' . (On obtiendra une équation en x de degré 4, on vérifiera que $x = t$ est racine triple, et on en déduira la dernière racine.)
- c) Déterminer l'enveloppe des droites MM' .

(3) On considère la cycloïde Γ d'équations paramétriques :

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \quad (t \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

- a) Déterminer le repère de Frenet et le rayon de courbure en un point $M(t)$ de Γ .
- b) Déterminer les équations paramétriques de la développée Γ_1 de Γ , et vérifier que Γ_1 est l'image de Γ par une translation que l'on précisera.
- c) Représenter graphiquement Γ et Γ_1 .