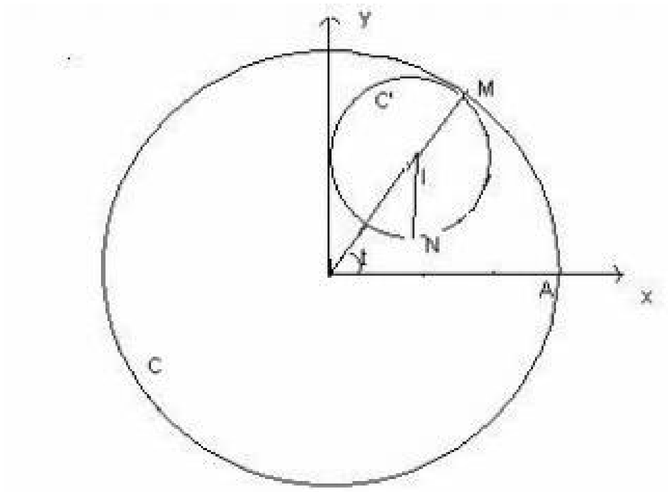
T2 B **3 février 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Soit $n \in \mathbf{N}\backslash\{0, 1\}$ et $R > 0$; un cercle C' de rayon $R' = \frac{R}{n}$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle C d'équation $x^2 + y^2 = R^2$. Donner les équations de la courbe paramétrée Γ_n (**hypocycloïde** à n rebroussements) décrite par le point N de C' quand le point $M(R\cos t, R\sin t)$ décrit C.



(Indication (cf figure) : on suppose que N est en A lorsque $t = 0$; remarquer que les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{NM}$ ont même longueur, en déduire l'angle des vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{IM}$; déterminer alors les coordonnées de I, puis celles de N.)

(**2**) Construire précisément la courbe Γ_n dans les cas suivants :

$n = 2$, $n = 3$ (deltoïde), $n = 4$ (astroïde).

(**3**) Qu'obtient-on si $R' = \frac{3R}{4}$?

(**4**) Calculer la longueur L_n de Γ_n et déterminer la limite de la suite (L_n).

(**5**) Déterminer de même les équations de l'**épicycloïde** à n rebroussements Γ'_n (où $n \in \mathbf{N}^*$) et calculer sa longueur L'_n .

(**6**) Représenter graphiquement Γ'_1 (cardioïde) et Γ'_2 (néphroïde).

(**7**) En faisant un changement d'origine, retrouver l'équation polaire $r = 2R(1 - \cos\theta)$ de la cardioïde Γ'_1 :

a) géométriquement ;
b) par le calcul.