T2 B **23 janvier 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) On considère le point M de la parabole d'équation $y = x^2$; on note H la projection orthogonale de M sur Ox, et I le milieu du segment OM.
Quelle est l'enveloppe des droites IH ?

(**2**) Soient A le point de coordonnées $(1,1)$, P un point de Ox et Q lepoint de Oy tel que les droites AP et AQ soient orthogonales.
Déterminer l'enveloppe des droites PQ.
(On obtiendra une parabole dont on précisera l'axe et le sommet.)

(**3**) Calculer l'abscisse curviligne S sur les courbes suivantes :

a) Spirale d'Archimède : $r(\theta) = a\theta$ $(a > 0,\ \theta \geq 0,$ origine en $\theta = 0)$.

b) Spirale logarithmique : $r(\theta) = e^{a\theta}$ $(a > 0,\ \theta \in \mathbf{R},$ origine en $\theta = 0)$;
déterminer $\lim\limits_{\theta \to -\infty} S(\theta)$. Faire une figure en choisissant a de façon que $r(\theta + 2\pi) = 2r(\theta)$.

(**4**) On considère la néphroïde (ou épicycloïde à deux rebroussements) d'équations :
$x(t) = 3\cos t - \cos 3t \quad y(t) = 3\sin t - \sin 3t \ (t \in [0, 2\pi])$

a) Construire la courbe.
b) Calculer sa longueur.

(**5**) Étudier la convergence des intégrales impropres :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t} \text{ puis } \int_0^1 \frac{dt}{-\ln t}.$$