T2 B **20 janvier 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) **Calcul de** $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer que les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}$, $t \mapsto \dfrac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}$, $t \mapsto \dfrac{\sin^2 nt}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin nt}{\sin t}$ peuvent être prolongées en des fonctions continues sur $[0, \pi/2]$.

On pose : $A_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}\mathrm{d}t$, $B_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 nt}{t^2}\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin nt}{\sin t}\mathrm{d}t$.

b) Montrer successivement que :
$A_n \leq I_n \leq B_n$, $B_{n+1} - B_n = J_{2n+1}$, $J_{2n+1} = J_{2n-1}$ et $A_n = B_n - \pi/4$.

c) Déduire des résultats précédents que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{n} = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Déterminer alors, après avoir montré sa convergence, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^\infty \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$.

e) En déduire, en intégrant par parties, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^\infty \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

(**2**) Montrer la convergence des intégrales :

a) $I_1 = \int_0^\infty \dfrac{\arctan^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ $\quad I_2 = \int_0^\infty \dfrac{\arctan t}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ $\quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \dfrac{t}{\tan t}\mathrm{d}t$.

b) Exprimer I_2 et I_3 en fonction de I_1 .