T2 B **16 janvier 2009**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Etudier la convergence des intégrales impropres :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2}{t^4+3\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \quad \int_0^1 \sqrt{t}\ \ln t\ \mathrm{d}t \ ; \quad \int_0^{\pi/2} \tan t\ \mathrm{d}t \ ; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\tan t} \ ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \quad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \ ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t^{3/2}}\ \mathrm{d}t \ .$$

(**2**) a) Montrer la convergence des intégrales suivantes : $I = \int_0^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{\infty} \dfrac{t^2\ \mathrm{d}t}{1+t^4}$.

b) Montrer, par un changement de variable, que : $I = J$.

c) Vérifier que : $I + J = \int_0^{\infty} \dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{(t-\frac{1}{t})^2+2}\,\mathrm{d}t$, puis faire le changement de variable : $u = t - \dfrac{1}{t}$, et en déduire la valeur de I.

d) Calculer $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\ \ \mathrm{d}t$ (faire un changement de variable pour se ramener à I).

(**3**) Montrer la convergence des intégrales suivantes, et les calculer :

a) $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n \mathrm{d}t$ ($n \in \mathbf{N}^*$; on cherchera une relation entre I_{n+1} et I_n).

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\ t}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\ t}$.

e) $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ ($\alpha < 1$) et $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ ($\alpha > 1$).