MATHÉMATIQUES

On veut résoudre sur $\mathbf{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(E)} \quad a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(a, b et $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, f de classe $\mathbf{C}^2$.)

(**1**) On effectue le changement de variables : $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y \quad (\alpha \neq \beta)$.
Vérifier que l'on définit ainsi un $\mathbf{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.
On pose : $f(x,y) = F(x + \alpha y, x + \beta y)$.
Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$, puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

(**2**) En déduire que l'équation (E) est équivalente à :

$$\text{(E')} \quad (a + 2b\alpha + c\alpha^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (a + 2b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

(**3**) On suppose : $b^2 - ac > 0$.
Comment choisir α et β pourque (E') soit équivalente à : $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$? Résoudre alors (E).
Exemple : $8\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

(**4**) On suppose : $b^2 - ac = 0$.
Soit β la racine double de $cX^2 + 2bX + a$; vérifier que : $a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta = 0$.
Choisir alors α pour que (E') soit équivalente à : $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$. Résoudre (E).
Exemple : $4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

(**5**) On suppose : $b^2 - ac < 0$.
Montrer que l'on peut choisir α et β pour que (E') soit équivalente à : $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$
Exemple : $2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$