

MATHÉMATIQUES

(1) Soient f et ϕ deux fonctions de classe C^2 définies sur \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} , et F la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par $F(x, y) = f(x + \phi(y))$.

Vérifier que : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

(2) On note $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, et Φ l'application de U dans \mathbf{R}^3 définie par : $\Phi(u, v, w) = (u, uv, uvw)$.

a) Vérifier que $\Phi(U) \subset U$ et que $U \subset \Phi(U)$, montrer que Φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur U , et écrire les matrices jacobiniennes de Φ en $(u, v, w) \in U$ et de Φ^{-1} en $(x, y, z) \in \Phi(U) = U$.

Soit f une application de classe C^1 de U dans \mathbf{R} et F l'application de U dans \mathbf{R} définie par :

$$F(u, v, w) = f(u, uv, uvw).$$

b) Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ et $\frac{\partial F}{\partial w}$ à l'aide des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ de f .

c) Montrer que f vérifie l'équation : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (E)

si et seulement si F vérifie l'équation : $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$

d) Achever la résolution de (E).

(3) Trouver toutes les fonctions $\phi : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^3 telles que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par $f(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ vérifie : $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

(4) Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant : $f(y, x) = -f(x, y)$ pour x et y dans \mathbf{R} .

Montrer que : $\forall a \in \mathbf{R} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, a) = 0$.

(5) Résoudre sur l'ouvert $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et à l'aide du changement de variables proposé l'équation aux dérivées partielles :

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y(1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (x = \frac{u^2 + v^2}{2}, y = \frac{u}{v}, v > 0).$$

(Réponse : $f(x, y) = G(y \sqrt{\frac{2x}{1 + y^2}})$.)

(6) Soient $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$ deux séries convergentes de réels positifs. Montrer que :

a) la série $[\sqrt{u_n v_n}]_{n \geq 0}$ est convergente (penser à l'inégalité arithmético-géométrique) ;

b) pour $\alpha \geq 1$, la série $[u_n^\alpha]_{n \geq 0}$ est convergente ;

c) pour $\alpha > 1/2$, la série $[\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}]_{n \geq 0}$ est convergente.

<http://convergences.ovh.org>

