

MATHÉMATIQUES

(1) Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathbf{C}^1 .

On pose : $F(t) = f(\text{Arctan}(t^3), t^3 e^{3t}, \sqrt{1+t^3})$ ($t \in \mathbf{R}_+$).

$G(u, v) = f(u^2 v, uv, uv^2)$ ($u, v \in \mathbf{R}$).

Exprimer, à l'aide des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ de f :

a) $F'(1)$.

b) Les dérivées partielles de G au point $(2, 3)$.

(2) a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f : x \rightarrow x^3 + 3xe^{x^2+\lambda}$; vérifier que f est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

b) Soit $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par : $\Phi(x, y) = (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$. Dédurre de la question précédente que Φ est bijective.

c) Montrer que Φ est un \mathbf{C}^1 -difféomorphisme de \mathbf{R}^2 sur \mathbf{R}^2 .

d) Soient $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = 0\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = x^2\}$.

Représenter graphiquement les ensembles A, B et C d'une part, et les ensembles $\Phi(A), \Phi(B)$ et $\Phi(C)$ d'autre part.

(3) Coordonnées sphériques.

Soit $U = \mathbf{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et Φ l'application de U dans \mathbf{R}^3 définie par :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) .$$

a) Montrer que Φ est injective.

b) Déterminer l'ensemble $V = \Phi(U)$.

c) Montrer que Φ est un \mathbf{C}^1 -difféomorphisme de U sur V .

(4) Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n . On suppose que AB est diagonalisable.

(a) Montrer que si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable (appliquer la définition d'une matrice diagonalisable.)

(b) Que pensez-vous du cas : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

(5) Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) La matrice A est-elle trigonalisable ? Est-elle diagonalisable ?

b) Donner une réduite A' de A ainsi qu'une matrice de passage.

c) On suppose les réels a_1, b_2 et c_3 distincts deux à deux. Les matrices

$T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$ et $T' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ?

d) Montrer que A est la somme de deux matrices diagonalisables.