

## MATHÉMATIQUES

(1) On désigne par  $u$  un endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) possédant  $n$  valeurs propres **distinctes** positives :  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .

a) Justifier l'existence d'une base  $\mathbf{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant :  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Préciser la dimension de  $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id})$ .

b) Soit  $v$  un endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant :  $v \circ v = u$ .

Montrer successivement que, pour  $1 \leq i \leq n$  :

b1)  $v(e_i) \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id})$  ;

b2) il existe  $\alpha_i \in \mathbf{R}$  tel que :  $v(e_i) = \alpha_i e_i$  ;

b3)  $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$  ou  $\alpha_i = -\sqrt{\lambda_i}$ .

c) Combien d'endomorphismes  $v$  de  $\mathbf{R}^n$  vérifient-ils :  $v \circ v = u$  ?

d) Déterminer toutes les matrices carrées réelles  $M$  d'ordre 3 vérifiant :

$$M^2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

e) Écrire la matrice, dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ , de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = (\tan \frac{\theta}{2})x$  ( $\theta \in ]-\pi, \pi[$ ). En déduire qu'il existe une infinité de matrices carrées d'ordre 2 dont la carré est égal à  $\mathbf{I}_2$ .

(2) On pose  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (cf. exercice 3).

Calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  (vérifier pour commencer que  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .)

Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ .

Exprimer de même, pour  $\alpha > 1$ , les sommes  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^\alpha}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  à l'aide de  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

(3) Calcul de  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Soient  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  et  $m \in \mathbf{N}^*$ .

a) Montrer que :  $\sin(2m+1)\alpha = (\sin^{2m+1}\alpha) \left( \binom{2m+1}{1} \cotan^{2m}\alpha - \binom{2m+1}{3} \cotan^{2m-2}\alpha + \dots + (-1)^m \right)$ .  
(On rappelle que  $\sin(2m+1)\alpha = \text{Im}((e^{i\alpha})^{2m+1})$  et que  $\binom{2m+1}{k} = \binom{2m+1}{2m+1-k}$  pour  $0 \leq k \leq 2m+1$ .)

b) À l'aide de la question précédente, montrer que l'équation :

$$\binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \dots + (-1)^m = 0,$$

possède  $m$  racines réelles et calculer ces racines.

c) Calculer la somme des racines de l'équation précédente.

d) Vérifier que :  $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ , puis que :  $\cotan^2 \alpha < \frac{1}{\alpha^2} < 1 + \cotan^2 \alpha$ ,  
puis déduire de ce qui précède que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .