T2 B **5 décembre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) On veut montrer la convergence de la série $\left[\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}\right]_{n\geq 2}$ où $\beta > 1$.

On pose, pour $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(\ln k)^\beta}$. Montrer que :

$S_{2^n-1} \leq 2\dfrac{1}{2(\ln 2)^\beta} + 4\dfrac{1}{4(\ln 4)^\beta} + ... + 2^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-1}(\ln 2^{n-1})^\beta}$ pour $n \geq 2$.

(Faire des paquets successifs de 2^p termes pour $1 \leq p \leq n-1$, en s'inspirant de la preuve de la convergence des séries de Riemann $\left[\dfrac{1}{n^\alpha}\right]_{n\geq 1}$ pour $\alpha > 1$).

En déduire que la suite (S_{2^n-1}) est majorée par $K = \dfrac{1}{(\ln 2)^\beta}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^\beta}\right)$, puis que la suite (S_n) est majorée. Conclure.

(**2**) Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2, et u l'application de E dans E définie par :

$$u\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Vérifier que u est linéaire, écrire la matrice de u dans la base canonique de E, puis diagonaliser u.

(**3**) Trigonaliser les matrices suivantes (on donnera dans chaque cas une matrice de passage) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(**4**) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps **C** des nombres complexes. On veut démontrer que AB **et** BA **ont même polynôme caractéristique**.

a) Montrer le résultat dans le cas où la matrice A est inversible. (Vérifier pour commencer que AB et BA sont semblables.)

On traite maintenant le cas général. On pose, pour λ et x dans **C** :

$P_\lambda(x) = \det(B(A - xI) - \lambda I)$ et $Q_\lambda(x) = \det((A - xI)B - \lambda I)$,

et on note H l'ensemble des nombres complexes x tels que $A - xI$ est inversible.

b) Vérifier que, si $x \in H$, et $\lambda \in \mathbf{C}$, alors $P_\lambda(x) = Q_\lambda(x)$.

c) Montrer que l'ensemble H est infini. (Indication : quel est le complémentaire de H ?)

d) En déduire que, pour tout λ dans **C**, la fonction polynomiale $P_\lambda - Q_\lambda$ est la fonction nulle.

e) Conclure.