

MATHÉMATIQUES

(1) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite **décroissante** de réels positifs.

a) On suppose que la série $[u_n]_{n \geq 1}$ est convergente, et on pose :

$$S_n = \sum_{p=1}^n u_p \text{ pour } 1 \leq p \leq n \text{ et } S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Vérifier que, pour $n \geq 1$, on a : $S_{3n} - S_{2n} \leq nu_{2n+1} \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ (c'est-à-dire $u_n = o(\frac{1}{n})$).

b) Montrer que pour $N \geq 2$, on a : $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{dx}{x \ln x}$.

En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)}$ ($n \geq 2$).

Que pensez-vous de la réciproque du résultat démontré en a) ?

(2) Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

On donnera dans chaque cas une matrice de passage.

(3) Pour quelles valeurs des réels a, b, c, d, e, f la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(4) Soit A une matrice carrée de rang 1. À quelle condition sur sa trace reconnaît-on qu'elle est diagonalisable ?

(5) Soit A une matrice carrée et λ un réel ; on suppose que λ^2 est valeur propre de A^2 .

Peut-on affirmer que λ ou $-\lambda$ est valeur propre de A ?

(6) Soit A une matrice diagonalisable à coefficients réels ; on suppose que $A^{2008} = \mathbf{I}$; montrer que $A^2 = \mathbf{I}$.

(7) Soit $E = \mathbf{R}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par : $u(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$ (P' désigne le polynôme dérivé de P).

a) Soit $P \neq 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(P) = \lambda P$; montrer que $\deg P = 1$ (considérer les termes de plus haut degré).

b) Déterminer alors les valeurs propres de u , puis ses sous-espaces propres.