MATHÉMATIQUES

Changement de l'ordre des termes d'une série convergente

On considère une série convergente $[u_n]_{n\geq 0}$ de nombres réels et σ une bijection de N dans N.
On se propose d'étudier la convergence de la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$.
On pose, pour $n \in \mathbf{N}$: $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$, $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $v_n = u_{\sigma(n)}$ et $T_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$.

(**1**) Dans cette question, σ est définie par $\sigma(2n) = 2n+1$ et $\sigma(2n+1) = 2n$ pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Exprimer T_{2n} et T_{2n+1} à l'aide de S_{2n+1} . Qu'en déduisez-vous ?

b) Calculer : $-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{729} + \frac{1}{243} + \ldots + \ldots$

(**2**) On suppose dans cette question que la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est à termes **réels positifs**.
On veut démontrer que la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$ converge et que : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

a) Montrer que : $T_n \leq S_{\max(\sigma(0),\ldots,\sigma(n))}$.

b) En déduire que la série $[v_n]_{n\geq 0}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leq S$.

c) Montrer que : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (considérer σ^{-1}).

d) Calculer : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{32} + \ldots + \ldots$

On admettra que le résultat de la question (2) est encore vrai si la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est **absolument convergente**.

Dans les questions (3) et (4), on choisit : $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$; on rappelle que $[u_n]_{n\geq 0}$ est une série convergente (mais non absolument convergente) de somme $S = \ln(2)$.

(**3**) On modifie l'ordre des termes pour obtenir la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots + \ldots$$

a) On considère la série $[w_n]_{n\geq 0}$ obtenue en regroupant 3 termes consécutifs de $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$ ($w_0 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, $w_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$, etc.) ; préciser l'expression de w_n .

b) On pose $H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ pour $n \geq 1$. Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, on a :

$$\ln \frac{n+1}{m+1} \leq H_n - H_m \leq \ln \frac{n}{m} \quad \text{(on pourra s'aider de figures.)}$$

c) On pose : $A_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}$ et $B_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}$ pour $n \geq 1$.
Exprimer A_n à l'aide de H_n et B_n à l'aide de H_n et H_{2n} .

d) On pose : $W_n = \sum_{p=0}^{n} w_p$ pour $n \geq 0$.
Exprimer W_n à l'aide de termes des suites (A_n) et (B_n) et en déduire que :
$W_n = (H_{4n+4} - H_{2n+2}) + \frac{1}{2}(H_{2n+2} - H_{n+1})$.

e) Montrer alors que la série $[w_n]_{n\geq 0}$ converge et calculer sa somme W.

f) Montrer enfin que la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa somme. Qu'en concluez-vous ?

(**4**) On modifie l'ordre des termes pour obtenir la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \ldots + \ldots$$

Montrer que la série $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$ est divergente.
Pour cela, considérer la série $[x_n]_{n\geq 0}$ obtenue en regroupant $2^n + 1$ termes consécutifs de $[u_{\sigma(n)}]_{n\geq 0}$ ($x_0 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$, etc.), préciser l'expression de x_n, minorer x_n de façon à montrer que la série $[x_n]_{n\geq 0}$ est (grossièrement) divergente, et conclure en raisonnant par l'absurde.