T2 B **21 novembre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Pour chacune des trois séries $[u_n]_{n\geq 0}$ suivantes, on demande de :
- montrer sa convergence,
- calculer sa somme,
- calculer le reste de rang n : $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$,
- étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $[R_n]_{n\geq 0}$.

a) $u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$ b) $u_n = \ln \dfrac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$ c) $u_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}$.

(**2**) a) **Un exemple de produit divergent de deux séries convergentes**.

On pose, pour $n \geq 0$: $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Écrire le terme général w_n de la série produit des séries de terme général u_n et v_n.
Montrer que $|w_n| \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. Conclure.

b) **Un exemple de produit convergent de deux séries divergentes**.

Étudier la série produit des séries de terme général u_n et v_n dans le cas suivant :
$u_0 = 2$ et $u_n = 2^n$ si $n \geq 1$; $v_0 = -1$ et $v_n = 1$ si $n \geq 1$.

(**3**) On désigne par E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soient F l'ensemble des matrices de E ayant une trace nulle et G l'ensemble des matrices scalaires (c'est-à-dire de la forme $\lambda \mathbf{I}_2$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$).

a) Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et préciser leur dimension.
b) F et G sont-ils supplémentaires ?

(**4**) Soit $E = \mathbf{R}^5$, $F =$Vect $(2,0,1,0,0)$, $G = \{x \in E,\ x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$ et $H = \{x \in E,\ x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = -x_5\}$.
La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

(**5**) Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.

a) Trouver une inclusion entre $(F \cap G) + (F \cap H)$ et $F \cap (G + H)$, puis entre $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.
b) Montrer par un exemple dans $\mathbf{R}^2$ que les inclusions précédentes peuvent être strictes.
On suppose maintenant que E est de dimension finie.
c) Rappel : $\dim(F + G) = \ldots$?
Que peut-on dire de $\dim(F + G + H)$?