

MATHÉMATIQUES

(1) Soit $p \in \mathbf{N}$; vérifier que la série de terme général $\frac{n^p}{n!}$ ($n \in \mathbf{N}$) est convergente.

On note $S(p)$ sa somme. Montrer que : $S(p+1) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S(k)$.

(On pourra pour cela écrire : $n^p = ((n-1)+1)^p$).

Calculer $S(p)$ pour $0 \leq p \leq 4$.

(2) On pose, pour a et $b \in \mathbf{R}$: $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Pour quelles valeurs de a et b la série $[u_n]_{n \geq 0}$ est-elle convergente ? (Mettre \sqrt{n} en facteur puis faire un développement limité.) Calculer alors sa somme.

(3) a) Déterminer la limite de la suite de terme général : $u_n = (1 + \frac{\alpha}{n})^n$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \int_1^n \ln t \, dt \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t \, dt$. (Commencer par faire une figure).

c) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis montrer que :

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1).$$

d) Déterminer un réel λ tel que : $\sqrt[n]{n!} \sim \lambda n$.

e) Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$ est croissante. (Etudier $v_{n+1} - v_n$ où $v_n = \ln \sqrt[n]{n!}$.)

f) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

(4) Étudier la convergence des séries de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3n + 1}} ; \quad \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad (\text{discuter selon } \alpha \in \mathbf{R} ; \text{ faire un développement limité}) ;$$

$$\frac{\cos^2 n}{n} ; \quad \ln\left(1 + \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

(5) Calculer à 10^{-5} près :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 5^n}.$$