MATHÉMATIQUES

(**1**) Montrer la convergence, puis calculer la somme des séries de terme général :

$$u_n = \frac{2^n+3}{4^{n+1}} \ ; \ v_n = \mathrm{e}^{-3n} \ ; \ w_n = \frac{5^n}{(n+3)!} \ ; \ x_n = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \ ; \ y_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n+1}} \ .$$

(**2**) Soient a et b dans $\mathbf{N}^*$ $(a < b)$; on pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$u_n = \frac{1}{(n+a)(n+b)} \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

a) Montrer que : $S_n = \dfrac{1}{b-a}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+a} - \sum_{k=b-a}^{n+b-a}\frac{1}{k+a}\Big)$.
b) En déduire que la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa somme S.
c) Qu'obtient-on pour $a = 2$ et $b = 5$?

(**3**) **Développement en série de** Arctan x.

Soient $x \in [-1,1]$. et $n \in \mathbf{N}$.

a) Vérifier que : $\dfrac{1}{1+x^2} - \displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p x^{2p} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
b) En déduire que : Arctan $x - \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1} = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$. (Commencer par le cas $x \in [0,1]$; majorer...)
d) Déduire des résultats précédents que : $\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad \text{Arctan } x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}$
e) Qu'obtient-on pour $x = 1$?

(**4**) Étudier la convergence des séries de terme général :

$$\frac{(3n)!}{(4n)!} \ ; \ \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \ ; \ \frac{\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}}{n} \ ; \ \frac{2+\sqrt{n+1}}{3+4n+n^2} \ ; \ \text{Arctan}\frac{n+1}{3n^2+2} \ ; \ \frac{n\ \ln^2 n}{n^3+2} \ ; \ \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \ ; \ \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$