T2 B **17 octobre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Calculer le volume de

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ 3x-2 \leq y \leq 3x+1,\ x+1 \leq y \leq x+4,\ y-1 \leq z \leq y+3\}.$$

(**2**) Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ où $R > 0$.
Quelle est la valeur moyenne de la distance d'un point de B à l'axe Oz ?
Quel est le moment d'inertie de B par rapport à l'axe Oz ?

(**3**) On appelle **tore** la partie T de $\mathbf{R}^3$ engendrée par la rotation du disque
$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ ,\ (x-a)^2+y^2 \leq R^2\}$ autour de Oy (on suppose $0 < R \leq a$).
Représenter D et T, ainsi que $T \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ y = y_0\}$ pour $-R \leq y_0 \leq R$, puis calculer le volume de T en faisant une sommation par tranches.

(**4**) **Théorème de Guldin**

Soit D une partie mesurable de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ $\quad (D \subset \{(y,z) \in \mathbf{R}^2\ ,\ y \geq 0\})$,
K la partie de $\mathbf{R}^3$ obtenue en faisant tourner D autour de Oz,
et $G = (y_G, z_G)$ le centre de gravité de D.

a) Vérifier que que $K = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbf{R}^3\ ,\ \theta \in [0,2\pi]$ et $(r,z) \in D\}$.

b) Montrer que le volume de K est $V = 2\pi \iint_D y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$.

c) En déduire que $V = 2\pi\ y_G A$ où A est l'aire de D.

d) Application 1 : retrouver le volume du tore (cf. exercice 3).

e) Application 2 : déterminer le centre de gravité de $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.