

MATHÉMATIQUES

(1) Soient $R > 0$, $\alpha \in]0, 2\pi]$ et $D_\alpha = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq \theta \leq \alpha\}$.

- a) Déterminer le centre de gravité G_α de D_α .
- b) Préciser $G_{\pi/2}$, G_π , $G_{3\pi/2}$ et $G_{2\pi}$.
- c) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_\alpha$; comment pouvait-on prévoir ce résultat ?
- d) Calculer la distance $d(\alpha)$ de O à G_α .
(On mettra le résultat sous la forme : $d(\alpha) = \frac{K}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$, où K est une constante à préciser.)
- e) Étudier les variations de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ($t \in]0, \pi]$).
- f) Représenter, à l'aide des questions d) et e), la courbe décrite par le point G_α quand α parcourt l'intervalle $]0, 2\pi]$.

(2) Soit f la fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^5 - xy^4}{x^4 + y^4} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

- a) Étudier en chaque point de \mathbf{R}^2 l'existence des dérivées partielles de f .
- b) Étudier la continuité de ces dérivées partielles.

(3) Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 \leq z, 3 \leq z \leq 4\}$.

Représenter D , calculer son volume et déterminer son centre de gravité.