T2 B **Vendredi 3 octobre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et F la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$F(x,y) = f(x) + g(y).$$

Montrer que F est continue si et seulement si f et g sont continues.

(**2**) Soient f la fonction de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $f(x) = x^x$,
et g la fonction de $]0,1[\times]0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $g(x,y) = x^y$.
Étudier l'existence d'une limite en 0 pour f.
Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour g (on pourra calculer $g(\frac{1}{n}, \frac{1}{\ln n})$ pour $n \geq 2$).

(**3**) Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que pour tout $(a,b) \neq (0,0)$, la fonction $x \mapsto f(ax,bx)$ est continue en 0, mais que f n'est pas continue en $(0,0)$ (étudier $f(x,x^2)$).

(**4**) Étudier pour chacune des trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ l'existence d'une limite en $(0,0,0)$:

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{x^2+y^2+z^2} \qquad g(x,y,z) = \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^2} \qquad h(x,y,z) = \frac{x^3z}{x^6+y^4+z^2}$$

(**5**) Représenter graphiquement les fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2} \qquad g(x,y) = x^2+4y^2-1 \qquad h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} .$$

(On étudiera pour commencer les intersections des graphes avec les plans d'équations :
$x = 0,\ y = 0,\ z = k\ (k \in \mathbf{R})$.)

(**6**) Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0 .$$

a) Étudier la continuité de f (pour la continuité en $(0,0)$, on pourra montrer que :
$|f(x,y)| \leq \dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$).
b) Étudier en chaque point de $\mathbf{R}^2$ l'existence des dérivées partielles de f.
c) Étudier la continuité des dérivées partielles de f.

(**7**) Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) = \left((1+x^2)^{y^2+z^2}, \int_{xy}^{yz} e^{t^2}\, dt\right)$$

a) Quelle est la différentielle de f au point (3,1,4) ?
b) Quelle est la matrice jacobienne de f au point (3,1,4) ?