T2 B **Mardi 30 septembre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$; on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A et $\overline{A}$ l'adhérence de A.
Rappeler les définitions : $x \in \mathring{A} \iff$??? et $x \in \overline{A} \iff$???

(a) Vérifier que si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) En déduire une inclusion entre les ensembles $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$, puis une inclusion entre les ensembles $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

(c) Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ (se donner $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, etc.) Conclusion ?

(d) Donner un exemple dans $\mathbf{R}$ où $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ ne sont pas égaux.

(e) Rappel : $\mathbf{R}^n \backslash (A \cup B) =$??? $\mathbf{R}^n \backslash (A \cap B) =$???
À l'aide des questions précédentes, comparer pour l'inclusion les ensembles $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$,
puis les ensembles $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.

(**2**) On rappelle les notations suivantes : si A et B sont deux sous-ensembles de l'ensemble E, on note $E \backslash A$ le complémentaire de A, et $A \backslash B$ la différence de A et B, c'est-à-dire l'ensemble des élements qui appartiennent à A mais pas à B ; on a donc : $A \backslash B = A \cap (E \backslash B)$.
On définit, pour $A \subset \mathbf{R}^n$ la **frontière** de A par : $\mathbf{F}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathbf{R}^n \setminus \mathring{A})$;
(autrement dit, la frontière de A est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ qui sont adhérents à A sans être intérieurs à A).

(a) Vérifier que : $\mathbf{F}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbf{R}^n \setminus A}$ et que $\mathbf{F}(A) = \mathbf{F}(\mathbf{R}^n \setminus A)$.

(b) Déterminer $\mathbf{F}(A)$ dans les cas suivants :

$(n = 1)$ $A = [0,1[\cup]1,2] \cup \{3,4\}$ $\quad A = \mathbf{Q}$

$(n = 2)$ $A = [0,1[\times]0,1]$ $\quad A = \{(x,y),\ x > 0 \text{ et } x = y\}$. (Faire une figure...)

(c) Montrer que A est un ensemble fermé si et seulement si $\mathbf{F}(A) \subset A$. Caractériser de même à l'aide de la frontière les ensembles ouverts.

(d) Montrer que : $\mathbf{F}(\overline{A}) \subset \mathbf{F}(A)$ et que $\mathbf{F}(\mathring{A}) \subset \mathbf{F}(A)$.
Donner des exemples (dans $\mathbf{R}$) où les inclusions sont strictes.
Donner un exemple où aucun des deux ensembles $\mathbf{F}(\overline{A})$ et $\mathbf{F}(\mathring{A})$ n'est inclus dans l'autre.

http : //convergences.ovh.org