T2 B **26 septembre 2008**

MATHÉMATIQUES

(**1**) Pour $n \geq 2$, on étudie le déterminant $D_n = |d_{i,j}|$ d'ordre n défini par :
$d_{i,i} = a$, $d_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, et $d_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$ $(a \in \mathbf{C})$.
On pose également : $D_0 = 1$ et $D_1 = a$.

a) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a : $D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}$.

On rappelle comment obtenir les solutions de l'équation récurrente linéaire du second ordre (E)
$u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ où b et $c \in \mathbf{C}$:
- si l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes α et β ,
alors la solution générale de (E) est : $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$ où A et $B \in \mathbf{C}$.
- si l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ possède une racine double α ,
alors la solution générale de (E) est : $u_n = (An + B)\alpha^n$ où A et $B \in \mathbf{C}$.

À titre d'exemple, donner rapidement la solution générale de l'équation $u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 0$,
puis la solution particulière de l'équation $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$ vérifiant $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$

b) On suppose $a \neq 2$ et $a \neq -2$. Montrer que $D_n = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$ où α et β sont les racines de l'équation : $r^2 - ar + 1 = 0$ (inutile de préciser α et β).

c) On suppose que $a = 3$; préciser la valeur de D_n .

d) On suppose que $a = 1$; préciser la valeur de D_n (on mettra α et β sous forme trigonométrique) ; pour quelles valeurs de n a-t-on $D_n = 0$?

e) Calculer D_n quand $a = 2$ et $a = -2$.

f) Résoudre le système d'équations $AX = 0$, où $A = [a_{i,j}]$ est la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| \leq 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

(**2**) Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + az + a^2t = 1 \\ y + bz + b^2t = 0 \\ x + 2az + 4a^2t = 1 \\ y + 2bz + 4b^2t = 0 \end{cases} \qquad (a \text{ et } b \in \mathbf{R}).$$

(**3**) Trouver un polynôme P de degré 3 vérifiant : $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 6$ et $P(4) = 24$.
Existe-t-il un polynôme P vérifiant $P(n) = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$?