MATHÉMATIQUES

(**1**) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

(On donnera le résultat sous forme factorisée.)

(**2**) On désigne par E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et par ϕ l'endomorphisme de E défini, pour $A \in E$, par $\phi(A) = {}^tA$ (où ${}^tA$ désigne la transposée de A).
Quel est le déterminant de ϕ ? (On commencera par écrire la matrice de ϕ dans une base de E.)
Même question quand E est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.
Essayer ensuite de généraliser.

(**3**) Calculer les déterminants d'ordre n :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & n \\ -1 & -2 & . & . & 1-n & 0 \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & . & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & . & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

(**4**) On considère, pour $n \geq 2$, le déterminant $\Delta_n = |\delta_{i,j}|$ d'ordre n défini par :
$\delta_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $\delta_{i,i} = i + 1$ si $i \leq n - 1$, et $\delta_{n,n} = 1$.

a) Ecrire le déterminant Δ_n sous forme de tableau puis le calculer.

On étudie maintenant, pour $n \geq 1$, le déterminant $D_n = |d_{i,j}|$ d'ordre n défini par :
$d_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, et $d_{i,i} = i + 1$.

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a : $D_n - \Delta_n = nD_{n-1}$ (penser à la multilinéarité).
c) On pose, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{D_n}{n!}$; donner, pour $n \geq 2$, une relation simple entre a_n et a_{n-1}.
d) En déduire D_n pour $n \geq 1$. (On exprimera la réponse à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.)
Vérifier le résultat obtenu pour $n = 2$, $n = 3$.