MATHÉMATIQUES

(**1**) On note $\mathbf{S}_4$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ et **e** l'élément neutre de ce groupe. On dit qu'un élément σ de $\mathbf{S}_4$ est **involutif** si et seulement si $\sigma \circ \sigma = \mathbf{e}$.

a) Quels sont les éléments involutifs de $\mathbf{S}_4$?
b) Soient σ et τ deux éléments involutifs. Montrer que $\sigma \circ \tau$ est un élément involutif si et seulement si $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

À toute permutation σ de $\mathbf{S}_4$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbf{R}^4$ défini par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq 4$, où $\mathsf{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

c) Écrire la matrice A_σ de u_σ dans la base B dans les cas suivants :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Quel est le déterminant de u_σ ($\sigma \in \mathbf{S}_4$)?
e) Comparer $u_{\sigma\circ\tau}$ et $u_\sigma \circ u_\tau$ pour σ et τ dans $\mathbf{S}_4$.
f) Soit σ un élément involutif de $\mathbf{S}_4$. Que peut-on dire de la matrice A_σ^2 ?

(**2**) On se propose de calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \beta & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \gamma & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \delta \end{vmatrix}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbf{R})$.

On pose , pour $x \in \mathbf{R}$: $F(x) = \begin{vmatrix} \alpha+x & 1+x & 1+x & 1+x \\ -1+x & \beta+x & 1+x & 1+x \\ -1+x & -1+x & \gamma+x & 1+x \\ -1+x & -1+x & -1+x & \delta+x \end{vmatrix}$.

a) Montrer que F est une fonction polynomiale de degré ≤ 1.
b) Calculer $F(1)$ et $F(-1)$.
c) À l'aide des questions précédentes, calculer Δ.

(**3**) La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & a \\ b & b & 3 & 3 \\ b & ab & 3 & 3a \end{bmatrix}$ est-elle inversible ($a, b \in \mathbf{R}$) ?

http://convergences.ovh.org