MATHÉMATIQUES

(1). On pose : $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 8 & 10 & 13 \end{vmatrix}$; que vaut $\begin{vmatrix} 4 & 14 & 10 & 6 \\ 8 & 16 & 14 & 8 \\ 12 & 20 & 18 & 14 \\ 16 & 26 & 22 & 18 \end{vmatrix}$?

(2) Rappeler la définition du rang d'une matrice, ainsi que la caractérisation par le rang des matrices carrées inversibles.

Soient α et β deux réels et $A = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha\beta & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \end{bmatrix}$; quel est le rang de A ?

(Commencer par calculer, sous forme factorisée, le déterminant de A.)

(3) a) Soit E un espace vectoriel **réel** de dimension n ; on suppose qu'il existe un endomorphisme u de E tel que : $u \circ u = -\mathrm{id}_E$; étudier la parité de n.
b) Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible.
c) Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre impair. Peut-on avoir $AB + BA = 0$?
(On pourra résoudre chacune de ces questions à l'aide du déterminant.)

(4) Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$.
On rappelle que le déterminant de A est défini par : $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.
a) Vérifier que $\det A \in \mathbf{Z}$.
b) On suppose que $a_{i,j}$ est pair si $i \neq j$, et que $a_{i,i}$ est impair.
Déterminer la parité de $\det A$.
c) On suppose que n est pair, que $a_{i,j}$ est impair si $i \neq j$, et que $a_{i,i}$ est pair.
On pose : $B = [b_{i,j}] = A^2$. Donner l'expression de $b_{i,j}$ à l'aide des coefficients de A, étudier ensuite la parité de $b_{i,j}$; en déduire la parité de $\det B$, puis celle de $\det A$.
d) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -10 & 2 \\ 4 & -1 & 16 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & -6 & 4 \\ -6 & -2 & 2 & 13 & 8 \\ 8 & -12 & 18 & 12 & -7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 19 \\ 5 & -10 & -5 & 11 \\ 27 & -3 & 12 & -1 \\ -1 & -9 & 5 & -16 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$