T2 B **5 septembre 2008**

MATHÉMATIQUES

(1) (Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de$E$ dans F, $x \in E$, $y \in F$.
$x \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow$? $\quad y \in \operatorname{Im} u \Leftrightarrow$? $\quad u$ est injectif $\Leftrightarrow$? $\quad u$ est surjectif $\Leftrightarrow$?)

On considère les espaces vectoriels $E,\ F,\ G,\ E',\ F',\ G'$,
et les applications linéaires $f,\ g,\ f',\ g',\ \theta,\ \phi$ et ψ:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \rightarrow & F & \rightarrow & G \\ \theta\downarrow & & \phi\downarrow & & \psi\downarrow \\ E' & \rightarrow & F' & \rightarrow & G' \\ & f' & & g' & \end{array}.$$

On suppose que : $\phi \circ f = f' \circ \theta$ et $\psi \circ g = g' \circ \phi$ (on dit que le diagramme est « commutatif »),
et que θ est surjectif, ϕ est bijectif, ψ est injectif.

Démontrer que : $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \operatorname{Im} f' = \operatorname{Ker} g'}$

(Deux implications, et pour chacune d'elles, deux inclusions à vérifier ; donc quatre inclusions à démontrer. Dans chaque cas, prendre un élément dans le premier ensemble et montrer qu'il est dans le second en exploitant les rappels et les hypothèses, et en « suivant les flèches » : c'est un jeu de piste...)

(2) Quelle est la signature de la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{2n} \ ?$$

(3) Soit $\sigma = [x_1, x_2, \ldots, x_p]$ un p-cycle de $\mathbf{S}_n$.

a) Décomposer σ en produit de transpositions.
b) Quelle est la signature de σ ?
c) Quel est l'inverse de σ ?
d) Quel est le nombre de 3-cycles dans $\mathbf{S}_5$? Quel est le nombre de p-cycles dans $\mathbf{S}_n$?

(4) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 2 & 6 & 13 & 7 & 4 & 10 & 5 & 12 & 1 & 9 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le nombre d'inversions et la signature de σ ?
b) Décomposer σ en produit de transpositions, et retrouver sa signature.
c) Décomposer σ en produit de cycles disjoints, et retrouver sa signature.

(5) Quelles sont les permutations paires de $\mathbf{S}_4$?

Retrouvez sur **http://convergences.ovh.org** les sujets des travaux dirigés ainsi que le programme des interrogations.