T2 A **T.D. de Maths** **19 Septembre 2008**

Déterminants

1/ Calculer $\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$

2/ Montrer en effectuant des développements que le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\beta) & \cos(\theta+\gamma) \\ \sin(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\beta) & \sin(\theta+\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix}$

est indépendant de θ. Calculer ce déterminant en donnant à θ une valeur particulière.

3/ Montrer que $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

4/ Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ en effectuant des combinaisons linéaires du type $L_1 \leftarrow L_1 + j\,L_2 + j^2\,L_3$. ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$)

5/ Soit A une matrice 3×3 à coefficients complexes. On appelle $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A . Montrer que $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$. Pourquoi le résultat est-il réel ?

6/ Calculer $\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{x} & -\mathrm{z} \\ -\mathrm{x} & 0 & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & -\mathrm{y} & 0 \end{vmatrix}$, puis $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix}$

7/ Calculer le déterminant d'ordre n : $A_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

8/ Soit $B_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n)

Par des combinaisons linéaires de lignes ou colonnes, montrer que l'on peut mettre en facteur $(a-b)^{n-1}$.

Terminer le calcul de B_n

L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit. (Aristote)