T2 A **T.D. de Maths** **12 Septembre 2008**

Problème

On appelle $\mathscr{C}^0$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^2$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

A toute fonction f de $\mathscr{C}^0$ on associe la fonction T(f) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[T(f)\right](x) = \int_0^x f(t)\ \sin(x-t)\ dt$$

1/ a/ Montrer que l'application T : f $\longrightarrow$ T(f) est linéaire.

b/ En développant le sinus, écrire [T(f)](x) sous la forme a(x).b(x) + c(x).d(x).

En déduire que T(f) $\in \mathscr{C}^2$

c/ Expliciter [T(f)]" , puis T(f) + [T(f)]" . En déduire le noyau de l'application linéaire T.

2/ Soit $\mathscr{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2$ composé des fonctions f vérifiant f(0) = f '(0) = 0

a/ Montrer que Im f $\subset \mathscr{V}$

b/ Soit f un élément de $\mathscr{V}$. Calculer T(f ") puis T(f + f "). En déduire l'image de T.

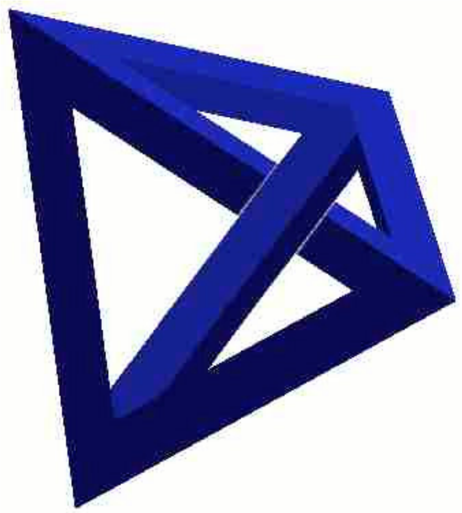
3/ Montrer que T est un isomophisme de $\mathscr{C}^0$ sur $\mathscr{V}$ et déterminer sa réciproque.

Exercices sur les permutations

n est un entier supérieur ou égal à 3 et S_n est le groupe des permutations de $\{1..n\}$.

Une transposition est notée (i, j) , un p-cycle est noté $(x_1, x_2, .., x_p)$

pour deux permutations σ_1 et σ_2 , on notera $\sigma_1.\sigma_2$ au lieu de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ leur composée.



1) Décomposer la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & 9 & 2 & 11 & 1 & 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a) en produit de cycles de supports disjoints

b) en produit de transpositions.

Quelle est sa signature ?

2) Soient i et j deux entiers tels que $1 \le i < j \le n$.

Calculer les composées suivantes :

a) $(i, i+1).(i+1, i+2)..(j-2, j-1).(j-1, j)$

b) $(1,2).(1,3)..(1,i)$

c) $(1,i).(1,i-1)..(1,3).(1,2)$

d) $(1,i).(1,j).(1,i)$

3) Soient :

$A = \{(1,2),(1,3),..,(1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 1 avec les autres entiers

$B = \{(1,2),(2,3),..,(n-2,n-1),(n-1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 2 entiers consécutifs

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de A

Ecrire σ comme composée d'éléments de A

b) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de B

Ecrire σ comme composée d'éléments de B

4) Quelle est la composée de 2 cycles dont les supports ont un et un seul élément commun ?

5) Décomposer en produit de cycles disjoints la composée de 2 cycles dont les supports ont exactement deux éléments communs.