

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels, muni d'une base (e_1, e_2, \dots, e_n) avec $n > 0$.

On rappelle le théorème suivant :

Si E possède une base à n éléments, toute autre famille libre à n éléments de E est aussi une base de E .

Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{id}$ (On note id l'application identité de E)

1/ Montrer que, pour tout vecteur x non nul de E , la famille $(x, f(x))$ est libre.

2/ a/ Soient x et y deux vecteurs de E , avec $x \neq 0$.

Montrer que si $ax + bf(x) + cy + df(y) = 0$ et si $(c \neq 0$ ou $d \neq 0)$ alors y est combinaison linéaire de x et $f(x)$.

b/ En déduire que si $y \notin \mathcal{Vect}(x, f(x))$, alors $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

3/ Soient a_1, a_2, \dots, a_k des vecteurs tels que $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_k, f(a_k))$ soit libre.

On pose $V = \mathcal{Vect}(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_k, f(a_k))$

Montrer que si y est un vecteur tel que $y \notin V$,

alors la famille $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_k, f(a_k), y, f(y))$ est libre.

Montrer qu'il existe des vecteurs a_1, a_2, \dots, a_p tels que $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p))$ soit une base de E .

4/ Donner, s'il en existe, un exemple d'endomorphisme f tel que $f \circ f = -\text{id}$ dans les cas suivants :

(1) $E = \mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} .

(2) $E = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel de la géométrie euclidienne, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(3) $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5, muni de la base $(1, X, X^2, \dots, X^5)$

5/ Soient $g = \text{id} + f$ et $h = \text{id} - f$.

a/ Etudier $\text{Ker } g$.

b/ Calculer $g \circ g$, $g \circ g \circ g \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$. Montrer que g est un automorphisme de E et déterminer g^{-1} .

c/ Soit $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p))$ une base de E .

Montrer que $(g(a_1), h(a_1), g(a_2), h(a_2), \dots, g(a_p), h(a_p))$ est une base de E .

