T2 **28 mars 2009**
Devoir surveillé
Durée 4 heures
Sans documents ni calculatrice

MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte deux exercices et un problème indépendants. La qualité de la rédaction, limitée à deux copies, sera un élément important de l'évaluation. Barème envisagé : 3 - 3 -14

I

Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' - y = 0.$$

II

Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + xy$.
On précisera s'il s'agit d'extremums globaux.

III

(1) On considère un réel non nul a, et les points du plan $P(0,a)$ et $Q(1,a)$.
Quelles sont les coordonnées du point M, projection orthogonale de P sur la droite OQ ?

Soit Γ la courbe plane paramétrée (cissoïde) d'équations : $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ $(t \in \mathbf{R})$.
On pose $M(t) = (x(t), y(t))$ et $A = M(1)$.

(2) a) Représenter graphiquement Γ.
b) Montrer que Γ admet une équation cartésienne de la forme $h(x,y) = 0$ où h est un polynôme.

(3) a) Factoriser sur $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^6 + 6X^4 + 9X^2 + 4$.
b) Donner sous forme intégrale la longueur L de l'arc de la courbe Γ joignant les points O et A.
c) Montrer que $L < \sqrt{5}\,\dfrac{\ln 2}{2}$. Donner également un minorant simple de L.

(4) a) Montrer que l'équation de la droite D_t normale en $M(t)$ à Γ est
$2x + t(t^2+3)y = t^2(t^2+2)$.
b) Déduire de la question précédente les équations paramétriques de la développée Γ_1 de Γ.
c) Montrer que Γ_1 admet une équation cartésienne de la forme $y^4 + \alpha y^2 + \beta x = 0$, où a et β sont deux réels que l'on précisera.

(5) a) Représenter graphiquement sur une même figure les courbes Γ et Γ_1 ainsi que la droite D_1.
b) Déterminer le centre de courbure C et le rayon de courbure R de la courbe Γ au point A.

(6) a) Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^1 x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
b) Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe Γ et la droite d'équation $x = 1$.
Montrer, à l'aide de la question 2-b, que l'aire de Δ est égale à $S = 2I$.
c) Calculer S. (On pourra commencer par le changement de variable $x = \sin^2 u$.)

****