T2 **30 janvier 2009**
Devoir surveillé
Durée 4 heures
Sans documents ni calculatrice

MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte deux problèmes et un exercice indépendants. La qualité de la rédaction, limitée à deux copies, sera un élément important de l'évaluation. Barème envisagé : 8 - 8 - 4.

I

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels, et on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$.
On étudie les relations entre la convergence de la série $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$ et celle de la série $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$.
On pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ et $T_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$ pour $n \in \mathbf{N}$.

(**1**)Trois exemples.
Étudier la convergence des séries $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$ et $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$, et calculer le cas échéant leur somme dans les cas suivants : a) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$; b) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; c) $u_n = (-1)^n$.

(**2**) On suppose que la série $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$ converge et on note S sa somme. Montrer que la série $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Quelle est sa somme ?

(**3**) Réciproquement, la convergence de la série $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$ implique-t-elle celle de la série $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$?

(**4**) Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, et que la série $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$ converge et a pour somme T. Montrer que la série $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$ converge ; quelle est sa somme ? (On pourra étudier S_{2n} et S_{2n+1}.)

(**5**) Dans cette question, on choisit $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{1+(-1)^n+n}$ $(n \in \mathbf{N})$.
Calculer v_n, étudier la convergence de la série $[v_n]_{n\in\mathbf{N}}$, puis, à la lumière des questions précédentes, celle de la série $[u_n]_{n\in\mathbf{N}}$.

(**6**) Même question qu'en (**5**), avec $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{1+(-1)^n+\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbf{N})$.

T.S.V.P.

II

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$, et par u un endomorphisme de E.
Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u^p = u \circ u \circ \ldots \circ u$ $(p$ fois$)$.
On suppose que le polynôme caractéristique de u s'écrit :

$$\chi_u = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\ldots(\lambda_n - X) = (-1)^n(X^n + \beta_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \beta_0),$$

où les λ_i et les β_i sont des réels, les λ_i étant distincts deux à deux.
Pour $1 \leq i \leq n$, soit a_i un élément non nul du noyau de $u - \lambda_i\,\mathrm{id}_E$, et $a = a_1 + \ldots + a_n$.

(**1**) Justifier l'existence des a_i, et préciser pourquoi $\mathbf{B}_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ est une base de E.

(**2**) Montrer que $\mathbf{B}_1 = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.
(On pourra écrire le déterminant de $\mathbf{B}_1$ dans $\mathbf{B}_0$.)

(**3**) Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, on a : $(\lambda_1\mathrm{id}_E - u) \circ (\lambda_2\mathrm{id}_E - u) \circ \ldots \circ (\lambda_n\mathrm{id}_E - u)(a_i) = 0$.

(**4**) En déduire que : $u^n(a) + \beta_{n-1}u^{n-1}(a) + \ldots + \beta_0 a = 0$.

(**5**) Écrire la matrice C de u dans la base $\mathbf{B}_1$.

(**6**) Appliquer le résultat précédent à l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (On donnera une matrice de passage.)

III

Soient f et g deux applications strictement positives et continues définies sur l'intervalle $[a, b[$ (avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$), et vérifiant $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

On admet les résultats suivants :
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$.
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

On pose, pour $x > 0$:

$$F_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^5 + t^3 + 1}, \quad F_2(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + 1 + \sin t}, \quad F_3(x) = \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$

(**1**) Étudier les limites de F_1 en $+\infty$, de F_2 en $+\infty$ et de F_3 en 0.

(**2**) Déterminer des équivalents « simples » de F_1 en $+\infty$, de F_2 en $+\infty$ et de F_3 en 0.