

MATHÉMATIQUES

(1) Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 0 < x \leq y \leq 8x \text{ et } \frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{27}{x^2}\}$ .

Calculer l'aire de  $D$ . (On pourra faire un changement de variables afin de se ramener à une intégrale sur un rectangle.)

(2) Soit  $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$ .  
représenter  $P$  et déterminer son centre de gravité.

(3) On pose :  $u_n = \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$  et  $a_n = n^2 - n + 1$  pour  $n \geq 1$ .

a) Montrer que la série de terme général  $u_n$  est convergente.

b) Calculer  $a_{n+1} - a_n$  ainsi que  $a_{n+1}a_n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $a_n$  et  $a_{n+1}$ ,  
en déduire la somme partielle  $S_n$  de rang  $n$  puis la somme  $S$  de la série de terme général  $u_n$ .

(4) On étudie la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{|\sin n|}{n}$  ( $n \geq 1$ ).

On pose :  $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$  pour  $n \geq 1$ .

a) Montrer qu'il n'existe pas deux entiers consécutifs dont la valeur absolue du sinus est inférieure à  $1/3$ . (On pourra commencer par représenter graphiquement la fonction  $x \mapsto |\sin x|$ .  
On donne :  $0,3 < \text{Arcsin}(1/3) < 0,4$ .)

b) En déduire que, pour  $n \geq 1$ , on a :  $u_{2n-1} + u_{2n} \geq \frac{1}{6n}$ .

c) Étudier  $S_{2n}$  et conclure.

(5) On pose, pour  $x > 0, y > 0$  et  $z \in \mathbf{R}$  :

$$f(x, y, z) = ((x^y)^z, x^{(y^z)}) .$$

Écrire la matrice jacobienne de  $f$  au point  $(2, 3, -1)$ .

\*\*\*\*\*

La rédaction est limitée à deux copies.

Les cinq exercices sont indépendants. Barème envisagé : 4-5-4-5-2.