T2 D.S. de Maths 27 Septembre 2008

Durée 1 heure 50 - Sans documents
Calculette T130 autorisée
Rédaction limitée à 2 copies

Dans chaque question, on précisera soigneusement transformations effectuées et les propriétés des déterminants que l'on utilise.

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice $n\times n$ à coefficients réels.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on considère le déterminant $(n+1)\times(n+1)$ suivant :

$$B(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ x^2 & a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x^n & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline x & & & & \\ x^2 & & & A & \\ \vdots & & & & \\ x^n & & & & \end{array}\right|$$

1. Un exemple : Calculer $B(x)$ quand $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. En développant le déterminant suivant la première colonne, montrer que $B(x)$ est un polynôme en x.
Que peut-on dire de son degré ? de son coefficient constant ? Vérifier ce dernier point en calculant $B(0)$.
3. Que peut-on dire de $B(x)$ si la matrice A possède 2 colonnes égales ?
4. Montrer que si la matrice A possède 2 lignes égales, alors $B(x)$ est divisible par $(x-1)$.
5. Que peut-on dire de $B(x)$ si la ligne i de la matrice A est égale à la ligne j multipliée par un scalaire λ ?
6. Soient $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $A=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ 0 & \alpha & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Calculer $B(x)$. (on pourra commencer par combiner les lignes 1 et 2)
7. Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice triangulaire à diagonale nulle) . Calculer $B(x)$.
8. Que devient $B(x)$ si on remplace la matrice $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

   par la matrice $A'=\begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{2,n} & a_{2,n-1} & & a_{2,1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n,1} \end{pmatrix}$?
9. Soient $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1$. Soit $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & \lambda_2 & \ddots & \lambda_n & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \ddots & \ddots & \lambda_1 & \lambda_n \\ \lambda_n & \lambda_{n-1} & \ddots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $B(x)$ en fonction du déterminant de A.

❖❖